ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN HƯỚNG

TỐC ĐỘ HỘI TỤ CỦA LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN TÌM NGHIỆM SỐ CHO BÀI TOÁN SONG ĐIỀU HÒA PHI TUYẾN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Vũ Vinh Quang

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của **TS Vũ Vinh Quang** và **TS Đàm Thanh Phương**. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành tới thầy giáo hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt những vấn đề nghiên cứu, dành nhiều tâm huyết, thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn này.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và nghiên cứu. Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học (khóa 2018-2020), cảm ơn gia đình, bạn bè và cơ quan chủ quản đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập tại đây.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 11 năm 2020.

Học viên

Vũ Văn Hướng

Mở đầu

Nhiều bài toán trong lĩnh vực vật lý, cơ học được mô tả bởi các phương trình đạo hàm riêng. Trong các lớp phương trình thì phương trình cấp cao thông dụng nhất là phương trình cấp hai và cấp bốn và dạng đặc biệt là phương trình dạng song điều hòa. Bài toán này mô tả các mô hình trong lý thuyết đàn hồi phẳng, lý thuyết bản mỏng, lý thuyết dòng chảy, các bài toán phân tích ảnh. Do phương trình song điều hòa có nhiều ứng dụng trong thực tế nên người ta quan tâm nhiều đến phương pháp giải các bài toán biên cho phương trình này. Đã có nhiều công trình nghiên cứu liên quan đến phương trình song điều hòa đã được các nhà khoa học công bố từ nhiều năm qua. Nhóm tác giả Đặng Quang Á cùng các cộng sự, với hướng nghiên cứu chủ yếu là đưa bài toán biên song điều hòa phi tuyến với điều kiện biên thuần nhất về một phương trình toán tử và từ việc nghiên cứu tính chất co của toán tử đã thu được kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên, từ đó xây dựng các phương pháp lặp dưới dạng liên tục giải bài toán vi phân. Tiếp tục phát triển phương pháp này, tác giả và các cộng sự đã nghiên cứu tiếp về các bài toán biên phi tuyến cấp bốn cho phương trình đạo hàm riêng và đã thu được nhiều kết quả về định tính cũng như định lượng. Tuy nhiên các kết quả lý thuyết mới chỉ dừng lại đối với lớp bài toán biên dạng song điều hòa với điều kiện biên thuần nhất, đồng thời việc nghiên cứu giải số với độ chính xác bậc cao cũng như việc đánh giá tốc độ hội tụ trên từng bước lưới là chưa được đánh giá đầy đủ.

Mục tiêu nghiên cứu chính của luận văn là tìm hiểu mô hình bài toán biên song điều hòa phi tuyến, sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán. Nghiên cứu cơ sở lý thuyết giải số bài toán này dựa trên phương pháp lặp dạng phương trình toán tử tìm hiểu mô hình sơ đồ lặp, tính chất hội tụ của các sơ đồ lặp và đồng thời nghiên cứu sự hội tụ của các lược đồ sai phân cũng như đánh giá tốc độ hội tụ của các lược đồ sai phân theo bước lưới.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương.

- Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ bản về các không gian hàm, lý thuyết về phương pháp lưới và kết quả xây dựng hệ phương trình sai phân giải bài toán biên elliptic cấp hai với độ chính xác cấp bốn, phương pháp giải hệ phương trình sai phân bằng thuật toán thu gọn khối lượng tính toán. Phương pháp xác định bậc hội tụ của các phương pháp lặp theo từng bước lưới.

- Chương 2: Trình bày về mô hình bài toán biên song điều hòa phi tuyến, sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán, cơ sở lý thuyết xây dựng các sơ đồ lặp dựa trên phương trình toán tử, các thuật toán chi tiết dạng vi phân và dạng sai phân tìm nghiệm số của các dạng bài toán song điều hòa phi tuyến với hệ điều kiện biên Dirichlet.

- Chương 3: Đưa ra một số kết quả tính toán giải số để kiểm tra độ chính xác của các thuật toán trong Chương 2, đồng thời đánh giá về bậc hội tụ theo từng bước lưới đối với một số bài toán biên cụ thể. Các kết quả số được thực hiện trên môi trường `MATLAB` version 7.0.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Nội dung chính của Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về các không gian hàm, lý thuyết về phương pháp sai phân và kết quả xây dựng lược đồ sai phân với độ chính xác bậc 4 tìm nghiệm số của bài toán biên elliptic cấp hai, thư viện chương trình giải số bài toán biên elliptic cấp hai trên miền chữ nhật. Cơ sở lý thuyết đánh giá bậc hội tụ trên bước lưới. Đây là các kiến thức và công cụ quan trọng sẽ sử dụng để nghiên cứu và thực hiện tính toán trong các chương tiếp sau của luận văn. Các kết quả này đã được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 3, 4, 5].

1.1 Một số kiến thức về không gian hàm

1.1.1 Không gian mêtric

Định nghĩa 1.1. *Cho X là một tập khác rỗng. Trên X ta trang bị một hàm số*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to d(x, y), \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau

1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in X$.

Khi đó, d *được gọi là một mêtric hay khoảng cách trên* X *và cặp* (X,d) *gọi là một không gian mêtric (đôi khi chỉ kí hiệu là* X*). Mỗi phần tử của* X *sẽ được gọi là một điểm,* $d(x,y)$ *gọi là khoảng cách giữa hai* x *và* y *điểm trên* X.

Định nghĩa 1.2. *Dãy số* $\{x_n\}$ *được gọi là hội tụ đến* x_0 *khi* $n \to +\infty$*, ký hiệu* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *khi và chỉ khi* $d(x_n, x_0) \to 0$ *khi* $n \to +\infty$.

Định nghĩa 1.3. *Dãy* $\{x_n\}$ *là dãy Cauchy hay dãy cơ bản nếu với mọi* ϵ*, tồn tại* $N(\epsilon)$ *sao cho với mọi* $m, n \geq N(\epsilon)$ *thì* $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Định nghĩa 1.4. *Không gian mêtric* X *được gọi là đủ nếu mọi dãy cơ bản hội tụ đến một phần tử nào đó thuộc* X.

1.1.2 Nguyên lý ánh xạ co

Định nghĩa 1.5 ([1])**.** *Cho* (X,d) *là một không gian metric. Ánh xạ* $f : X \to X$ *được gọi là một ánh xạ co trên* X *nếu và chỉ nếu tồn tại* $q \in [0,1)$ *sao cho với mọi* $x, y \in X$*, ta luôn có*

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y),$$

trong đó, q *được gọi là hệ số co.*

Dễ thấy mọi ánh xạ co đều liên tục.

Định lý 1.1 (Nguyên lý ánh xạ co Banach. [1])**.** *Cho* f *là ánh xạ co trong không gian mêtric đủ* (X,d)*. Khi đó,*

(a) Tồn tại duy nhất $x^* \in X$ *sao cho* $f(x^*) = x^*$*. Phần tử* x^* *được gọi là điểm bất động của ánh xạ* f.

(b) Mọi dãy lặp $x_{n+1} = f(x_n)$*,* $n \geq 0$ *xuất phát từ* x_0 *bất kỳ đều hội tụ. Ngoài ra, ta có các ước lượng sau*

$$d(x_n, x^*) \leq q^n (1-q)^{-1} d(x_0, x_1), n \geq 1$$
$$d(x_n, x^*) \leq q(1-q)^{-1} d(x_{n-1}, x_n), n \geq 1.$$

1.1.3 Không gian tuyến tuyến tính định chuẩn

Định nghĩa 1.6. *Cho X là một không gian tuyến tính, ta đưa vào ánh xạ ký hiệu là chuẩn X $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện*

a. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

b. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

với mọi $x, y \in X$. Khi đó cặp $(X, \|.\|)$, trong đó X là một không gian tuyến tính, $\|.\|$ là một chuẩn trên X, gọi là một không gian định chuẩn (hay còn gọi là không gian tuyến tính định chuẩn).

Cho X là một không gian định chuẩn. Xét hàm số

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R},$$

xác định bởi $\rho(x, y) = \|x - y\|$, với $x, y \in X$. Dễ chứng minh được với định nghĩa như trên thì ρ là một metric trên X, gọi là metric sinh bởi chuẩn. Như vậy, không gian định chuẩn là một không gian metric.

1.1.4 Điều kiện Lipchitz

Định nghĩa 1.7. *Giả sử $f : V \to W$ được gọi là thỏa mãn điều kiện Lipchitz nếu tồn tại các hằng số $L_k \geq 0$ sao cho với mọi y_k, z_k thì hệ thức sau đây được thỏa mãn*

$$\|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n)\| \leq L_1\|y_1 - z_1\| + \cdots + L_n\|y_n - z_n\|,$$

trong đó $L_1, L_2, \dots, L_n$ được gọi là các hằng số Lipchitz.

1.2 Lý thuyết về phương pháp sai phân

Phương pháp lưới hay còn gọi là phương pháp sai phân được áp dụng rộng rãi trên nhiều lĩnh vực khoa học, kỹ thuật. Nội dung chính của nó là đưa các bài toán vi phân về các hệ phương trình sai phân tương ứng với một sai số phụ thuộc vào phương pháp sai phân. Từ đó nghiệm xấp xỉ bằng số của các bài toán vi phân được xác định bằng các phương pháp đại số giải các hệ phương trình lưới. Sau đây chúng ta sẽ xem xét chi tiết phương pháp lưới áp dụng cho bài toán biên elliptic cấp hai với hệ điều kiện biên Dirichlet.

1.2.1 Công thức Taylor

Giả sử $u(x, y)$ là một hàm số xác định và có các đạo hàm riêng theo các biến đến cấp $m + 1$ trong một khoảng $\Omega \in \mathbb{R}^2$ chứa các điểm (x, y) và $(x + h, y + k)$, trong đó h, k là các đại lượng đủ nhỏ có thể dương hay âm. Khi đó tương tự như hàm 1 biến số, chúng ta có công thức khai triển Taylor như sau

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) &= u(x, y) + h\frac{\partial u}{\partial} + k\frac{\partial u}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \cdots + o(h^m + k^m). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Về mặt ý nghĩa toán học tính toán thì công thức Taylor, giá trị của hàm số tại điểm $(x + h, y + k)$ sẽ được được tính qua các giá trị hàm và các đạo hàm riêng các cấp tại điểm (x, y). Nếu chúng ta giữ đến số hạng chứa các đạo hàm cấp m thì kết quả tính toán sẽ đảm bảo sai số xấp xỉ một đại lượng vô cùng bé là $o(h^m)$. Sau đây luận văn sẽ đưa ra một số kết quả khi xậy dựng các phương pháp sai phân dựa trên công thức Taylor.

1.2.2 Lược đồ sai phân cấp bốn giải bài toán biên elliptic cấp hai

Xét bài toán biên

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \\ u = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega,\ \Omega = [a, b] \times [c, d]. \end{cases} \tag{1.2}$$